Véletlen pontok d dimenzióban

Naszódi Márton

2026.03.31.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az Eötvös József Gimnázium diákjai Naszódi Márton előadásán vettek részt 2026. március 31-én, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Márton a kutatóintézet tagja és az ELTE TTK Geometriai tanszék oktatója.

Az előadást az Középiskolai MTA Alumni Program tette lehetővé, amelynek keretében kutatók látogatnak el egykori középiskolájukba és más iskolákba, hogy munkájukról, kutatási témájukról, a tudományos módszerről beszélgessenek diákokkal. A program célja egy tudománybarát társadalom építése, a kritikai gondolkodás fejlesztése.

Ez olyan előadások egyike, amelyre a gimnáziumból a két ajtónyira lévő kutatóintézetbe már felkészülten vonultak át a diákok, hiszen külön tanóra lett a skaláris szorzat megtanítására rászánva.

Maga az előadás nagy siker volt, utána sokan maradtak kérdezni és érdeklődni is egy matematikus munkájáról. Márton nemcsak bemutatta a probléma megoldását és saját módszerét, hanem adott gondolkodtató, a témához kapcsolódó feladatot is!

Iskolánk plakátja az előadásról

Az előadásról készült egy kis cikk, hogy Naszódi Márton ötlete és munkája itt is meg legyen örökítve! A feladott probléma az utolsó oldalon található.

2. A kérdés

> Legfeljebb hány pontot lehet elhelyezni a d-dimenziós térben ($\mathbb{R}^d$) úgy, hogy bármely három pontot kiválasztva azok egy hegyesszögű háromszöget alkossanak?
>
> — Erdős Pál

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1; x_2;\ ...\ ; x_d) : x_1; x_2;\ ...\ ; x_d \in \mathbb{R}\}$$

skaláris szorzás:

$$(x_1;\ ...\ ; x_d) \cdot (x_1';\ ...\ ; x_d') = x_1 x_1' +\ ...\ x_d x_d' \in \mathbb{R}$$

x és y távolsága:

$$||\underline{x} - \underline{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 +\ ...\ + (x_d - y_d)^2}$$

Definíció:

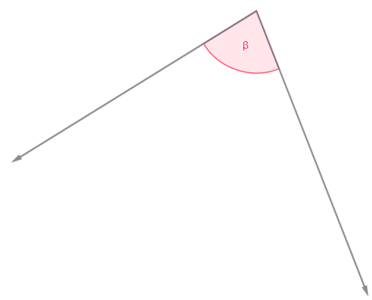
$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 0$$

$$\underline{x} \text{ és } \underline{y} \text{ bezárt szöge: az a } \varphi \in [0, \pi] : \underline{x} \cdot \underline{y} = ||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}|| \cdot \cos\varphi$$

azaz:

$$\cos\varphi = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}||}$$

Ez az érték mindig 0 és 1 között lesz a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenség miatt, mely kimondja, hogy $||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}|| > |\underline{x} \cdot \underline{y}|$



$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektor háromszögbeli szöge akkor és csak akkor hegyesszög, ha $(\underline{a}-\underline{b})(\underline{c}-\underline{b})>0$.

1983, Erdős-Füredi : Ha a d elég nagy, akkor van $(1,15)^d$ elemszámú ponthalmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyben minden háromszög hegyesszögű.

3. Naszódi Márton-Véletlen Konstrukció

Vegyük csak azokat a vektorokat, melyek összes koordinátája
vagy 0, vagy 1. $\rightarrow \{0;1\}^d$

Véletlenszerűen választunk N darab ilyen vektort (visszatevéssel húzunk).

Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c} \in \{0;1\}^d$ 3 kiválasztott pont az N közül.

$(\underline{a}-\underline{b})(\underline{c}-\underline{b})=(a_1-b_1)(c_1-b_1)+(a_2-b_2)(c_2-b_2)+\ \dots\ (a_d-b_d)(c_d-b_d)$

a_1	b_1	c_1	$(a_1 - b_1)(c_1 - b_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\angle(\underline{a}\ ,\ \underline{b}\ ,\ \underline{c})$ nem hegyesszög, ha mind d tag 0.

Tehát, $\frac{6}{8}$, azaz $\frac{3}{4}$ esély van arra, hogy az eredményünk rossz. Vagyis:

$$\mathbb{P}\left(\angle\left(\underline{a}\ ,\ \underline{b}\ ,\ \underline{c}\right)\ \text{nem hegyesszög}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^d$$

$$\underbrace{\binom{N}{3} \cdot 3}_{\text{Ennyi hármas van.}} = \frac{(N-1)(N-2)}{2} N < N^3$$

Rosszak várható száma:

$$\frac{N \cdot (N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^d < N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d$$

Ha $N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d < \frac{N}{2} \rightarrow$ Minden rossz hármasból elhagyva egy pontot marad $\frac{N}{2}$ pont, rossz hármas nélkül.

Végezzük el az egyenlőtlenséget:

$$N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d < \frac{N}{2}$$

$$N^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^d$$

$$N < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$$

$$N = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$$

Megfelelően nagy d számra ez nekünk egy megbízható közelítés, lehet például $N = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$ is.

4. Egy érdekes probléma

Bizonyítsuk, hogy n-dimenziós térben 2^n db pontot lehet maximum elhelyezni úgy, hogy bármely három által meghatározott szög maximum 90°.

Tehát az előadás sikere nagy volt, szerintünk sokakat inspirált arra, hogy elmélyüljenek a matematikusi karrier ötletében. Innen is köszönjük szépen Naszódi Mártonnak, Marcinak ezt a fantasztikus bemutatót!