Véletlen pontok d dimenzióban

Naszódi Márton

2026.03.31.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az Eötvös József Gimnázium diákjai Naszódi Márton előadásán vettek részt március 31-én, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Márton a kutatóintézet tagja és az ELTE TTK Geometriai tanszék oktatója.

Ez olyan előadások egyike, amelyre a gimnáziumból a két ajtónyira lévő kutatóintézetbe már felkészülten vonultak át a diákok, hiszen külön tanóra lett a skaláris szorzat megtanítására rászánva.

Maga az előadás nagy siker volt, utána sokan maradtak kérdezni és érdeklődni is egy matematikus munkájáról. Márton nemcsak bemutatta a probléma megoldását és saját módszerét, hanem adott gondolkodtató, a témához kapcsolódó feladatot is!

Iskolánk plakátja az előadásról

Az előadásról készült egy kis cikk, hogy Naszódi Márton ötletét és munkáját itt is meg legyen örökítve! A feladott problémák az utolsó oldalon találhatóak.

2. A kérdés

> Legfeljebb hány pontot lehet elhelyezni a d-dimenziós térben ($\mathbb{R}^d$) úgy, hogy bármely három pontot kiválasztva azok egy hegyesszögű háromszöget alkossanak?
>
> — Erdős Pál

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1; x_2;\ ...\ ; x_d) : x_1; x_2;\ ...\ ; x_d \in \mathbb{R}\}$$

skaláris szorzás:

$$(x_1;\ ...\ ; x_d) \cdot (x'_1;\ ...\ ; x'_d) = x_1 x'_1 +\ ...\ x_d x'_d \in \mathbb{R}$$

x és y távolsága:

$$||\underline{x} - \underline{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 +\ ...\ + (x_d - y_d)^2}$$

nem finíció? :

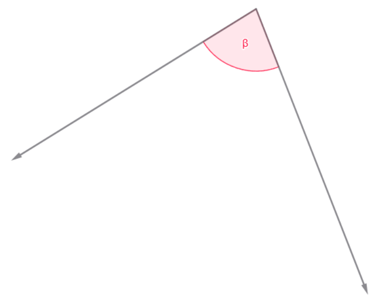
$$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 0$$

$\underline{x}$ és $\underline{y}$ bezárt szöge: az a $\varphi \in [0, \pi] : \underline{x} \cdot \underline{y} = ||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}|| \cdot \cos\varphi$

azaz:

$$\cos\varphi = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}||}$$

Ez az érték mindig 0 és 1 között lesz a *Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij* egyenlőtlenség miatt, mely kimondja, hogy $||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}|| > |\underline{x} \cdot \underline{y}|$



$\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}}$ vektor háromszögbeli szöge akkor és csak akkor hegyesszög, ha $(\underline{a}-\underline{b})(\underline{c}-\underline{b})>0$.

1983, Erdős-Füredi : Ha a d elég nagy, akkor van $(1,15)^d$ elemszámú ponthalmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, amelyben minden háromszög hegyesszögű.

3. Véletlen Konstrukció

Vegyük csak azokat a vektorokat, melyek összes koordinátája
vagy 0, vagy 1. $\rightarrow \{0;1\}^d$

Véletlenszerűen választunk N darab ilyen vektort (visszatevéssel húzunk).

Legyen $\underline{\mathrm{a}}$, $\underline{\mathrm{b}}$, $\underline{\mathrm{c}} \in \{0;1\}^d$ 3 kiválasztott pont az N közül.

$$(\underline{a}-\underline{b})(\underline{c}-\underline{b})=(a_1-b_1)(c_1-b_1)+(a_2-b_2)(c_2-b_2)+\ \dots\ (a_d-b_d)(c_d-b_d)$$

a_1	b_1	c_1	$(a_1 - b_1)(c_1 - b_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\angle(\underline{a}\ ,\ \underline{b}\ ,\ \underline{c})$ nem hegyesszög, ha mind d tag 0.

Tehát, $\frac{6}{8}$, azaz $\frac{3}{4}$ esély van arra, hogy az eredményünk rossz. Vagyis:

$$\mathbb{P}\left(\angle\left(\underline{a}\ ,\ \underline{b}\ ,\ \underline{c}\right)\ \text{nem hegyesszög}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^d$$

$$\binom{N}{3} \cdot 3 = \frac{(N-1)(N-2)}{2} N < N^3$$

$\downarrow$

Ennyi hármas van.

Rosszak várható száma:

$$\frac{N \cdot (N-1)(N-2)}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^d < N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d$$

Ha $N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d < \frac{N}{2} \rightarrow$ Minden rossz hármasból elhagyva egy pontot marad $\frac{N}{2}$ pont, rossz hármas nélkül.

Végezzük el az egyenlőtlenséget:

$$N^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^d < \frac{N}{2}$$

$$N^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^d$$

$$N < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$$

$$N = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$$

Megfelelően nagy d számra ez nekünk egy megbízható közelítés, lehet például $N = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d$ is.